ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

7.1 В сокровищнице древнего ордена Хранителей пропали семь магических камней, дарующих мудрость. Верховный Хранитель допросил пятерых главных стражей — Альфреда, Бенедикта, Виктора, Габриэля и Доминика — и спросил у каждого: «Кто похитил камни?»
Известно, что правду говорит только один, а все остальные лгут.
Вот их показания:

Альфред: «Камни похитил Бенедикт».
Бенедикт: «Камни похитил Доминик».
Виктор: «Камни похитил не я».
Габриэль: «Камни похитил Альфред».
Доминик: «Если камни похитил не Бенедикт, то их похитил я».

Кто на самом деле похитил камни?

7.2. Матвей и Саша живут в одном доме и учатся в одной школе. Однажды Матвей вышел из дома и пошёл в школу, а Саша в тот же момент времени вышел из школы и пошёл домой. Когда они встретились, Матвей прошёл $\frac{2}{5}$ расстояния от дома до школы, а когда Саша пришёл домой, Матвею оставалось пройти 150 м до школы. Найдите расстояние от дома до школы.

7.3. Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую нечестной, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё остается неравное количество отмеченных точек. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

7.4. Двух шахматных коней назовём «упряжкой», если они стоят на доске так, что бьют друг друга. Можно ли поставить на шахматную доску 12 упряжек так, чтобы кони из разных упряжек друг друга не били?

7.5. Кузнечик Кузя играет в игру, прыгает по тропинке в виде прямой вперед или назад, выбирая направление прыжка произвольно. В первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см, в третий – на 3 см и так далее. Может ли он после 2025 прыжков оказаться там, где начинал?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

Решения задач.

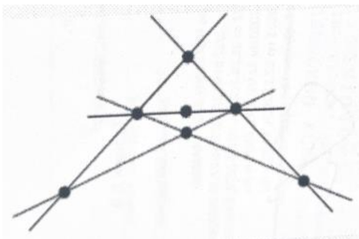
7.1. В ходе рассмотрения вариантов, что правду говорит Альфред, Бенедикт, Габриэль или Доминик, приходим к противоречиям с условиями задачи. Следовательно, правду говорит Виктор и камни похитил Габриэль.

Ответ: Габриэль.

7.2. Скорости Матвея и Саши относятся как 2 : 3, значит, когда Саша пришёл домой, Матвей прошёл $\frac{2}{3}$ пути. Следовательно, Матвею осталось пройти $\frac{1}{3}$ пути, что согласно условию равно 150 м. Поэтому весь путь в 3 раза больше.

Ответ: 450 м.

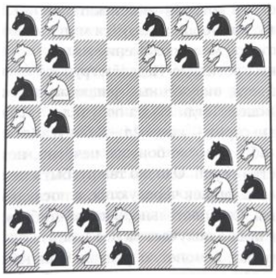
7.3. Да, можно. Например,



Ответ: можно.
Комментарий: приведён пример, соответствующий условию задачи, 7 баллов.

7.4.

Четыре упряжки образуют прямоугольник 2 × 4, причём кони из разных упряжек в таком прямоугольнике не бьют друг друга. На доске 8 × 8 можно разместить даже не три, а четыре таких прямоугольника, при этом кони из разных прямоугольников друг друга не бьют.



Ответ: Можно.

Комментарий: только ответ без обоснования – 1 балл.

7.5. Как бы мы ни расставляли знаки в сумме $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm 2025$ (плюс соответствует прыжку вправо, а минус – влево), эта сумма будет нечётна (в ней $(2025 + 1) : 2 = 1013$ нечётных слагаемых) и, следовательно, не может равняться нулю. Значит, кузнечик не мог оказаться в начальной точке.

Ответ: Не может.

Комментарий: только ответ без обоснования – 1 балл.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

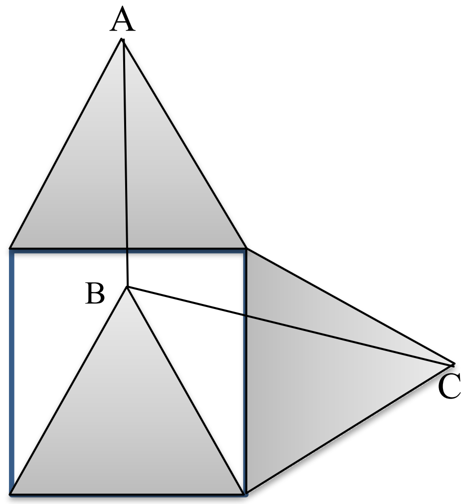
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

8.1. Вычислите:

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)-2^{64}+128$$

8.2. На трёх сторонах квадрата построили равносторонние треугольники так, как это показано на рисунке. Найдите на нем величину угла ABC.



8.3. Двух шахматных коней назовём «упряжкой», если они стоят на доске так, что бьют друг друга. Можно ли поставить на шахматную доску 12 упряжек так, чтобы кони из разных упряжек друг друга не били?

8.4. На урок химии учительница принесла полную колбу с 40%-ной соляной кислотой. Она отлила некоторое количество в первую пробирку, долила колбу водой доверху и перемешала. Потом такое же количество отлила во вторую пробирку, долила колбу водой и перемешала. Потом такое же количество отлила в третью пробирку, опять долила воды и перемешала. В результате концентрация кислоты в колбе стала равна 16,875%. Какова концентрация кислоты во второй пробирке?

8.5. Дан многочлен $(1+a^3+a^6+a^9+\cdots+a^{30})(1+a^5+a^{10}+a^{15}+\cdots+a^{30})$. Определите, сколько одночленов будет после его преобразования.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

Решения задач.

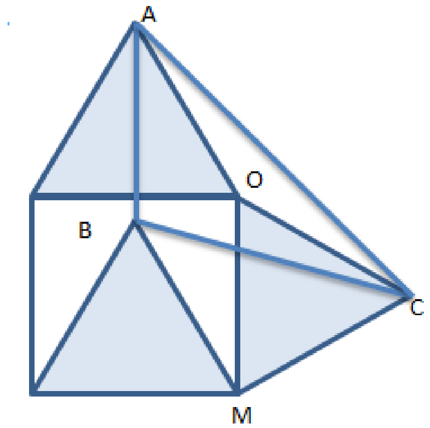
8.1. Домножим и разделим часть выражения на (2-1):

$\frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)}{2-1} - 2^{64} + 128 = \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)}{1} - 2^{64} + 128 = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} + 128 = (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} + 128 = (2^{16}-1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} + 128 = (2^{32}-1)(2^{32}+1) - 2^{64} + 128 = 2^{64} - 1 - 2^{64} + 128 = 127$

Ответ: 127

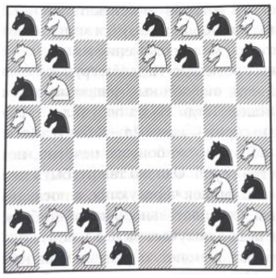
8.2. Рассмотрим равнобедренный ΔAOC ($AO = OC$). $\angle AOC = 150^0$, значит $\angle OAC = \angle OCA = 15^0$. В прямоугольном равнобедренном ΔBMC углы при основании BC равны по 45^0, следовательно, $\angle OCB = 15^0$. При этом $\angle OAB = 30^0$.

Соответственно, $\angle ABC = 180^0 - \angle BAC - \angle ACB = 105^0$.



Ответ: 105^0.

8.3. Четыре упряжки образуют прямоугольник 2×4, причём кони из разных упряжек в таком прямоугольнике не бьют друг друга. На доске 8×8 можно разместить даже не три, а четыре таких прямоугольника, при этом кони из разных прямоугольников друг друга не бьют.



Ответ: Можно.

Комментарий: только ответ без обоснования – 1 балл.

8.4. Обозначим через q ту часть объёма всей колбы, которая остаётся в ней после каждого отливания в пробирку. Заметим, что каждый раз количество чистой кислоты в сосуде уменьшается так, что отношение её нового и старого объёмов равно q. Следовательно, концентрация кислоты после каждого разбавления водой становится равной её предыдущему значению, умноженному на q.

По условию после трёх разбавлений концентрация кислоты (в процентах) равна $40q^3 = 16\frac{7}{8} = \frac{135}{8}$, откуда $q^3 = \frac{27}{64}, q = \frac{3}{4}$. Раствор во второй пробирке получен после первого разбавления кислоты водой, поэтому искомая концентрация равна $40q = 40 \cdot \frac{3}{4}$ = 30%.

Ответ: 30%

8.5. Раскроем скобки и (не приводя подобные члены) выпишем в таблицу все получающиеся степени одночленов. Первая строка таблицы – это степени, получающиеся при умножении первого многочлена – сомножителя на первое слагаемое второго многочлена (равное 1); вторая строка – это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на второе слагаемое второго многочлена (равное a^5), и т.д.

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

Всего в таблице 77 чисел, из них 24 входят в таблицу более одного раза (блоки повторяющихся чисел обведены рамкой). Следовательно, после приведения подобных членов получится 77 - 24 = 53.

Ответ: 53 одночлена.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

9.1. Решите уравнение: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x + 12y - 6z = -22$.

9.2. Известно, что квадратичная функция $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет нули и $f(2024) = f(2026)$. Найдите a.

9.3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что AD: BC=$\sqrt{3}$:2 и что угол BAC равен 45^0. Найдите угол BMC, где M – точка пересечения медиан.

9.4. Натуральное число, большее миллиона, дает одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч?

9.5. Известно, что на шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Школьнику Пете не нравится шахматная раскраска доски, и он раскрасил доску в 32 цвета, так что клеток каждого цвета ровно две. Сможет ли он теперь расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и стояли на клетках разного цвета?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

Решения задач.

9.1. $(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 12y + 9) + (z^2 - 6z + 9) = -22+22$

$(x-2)^2+(2y+3)^2+(z-3)^2=0$

$x = 2,\ y = -1{,}5,\ z = 3.$

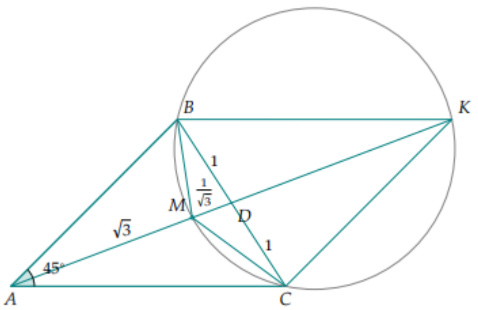
Ответ: $x = 2,\ y = -1{,}5,\ z = 3.$

9.2. График данной функции симметричен относительно $x = -\frac{a}{2}$,

$-\frac{a}{2} = \frac{2024+2026}{2} = 2025$, $a = -4050$.

Ответ: - 4050.

9.3.



Удвоим медиану AD, тогда четырехугольник ABKC - параллелограмм, угол BKC равен углу BAC, т.е. угол BKC 45^0.

M-точка пересечения медиан треугольника ABC, значит, если BD = 1, тогда AD = $\sqrt{3}$, а MD = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Треугольники BDK и CDM подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, т.к. $\frac{DM}{DC} = \frac{DB}{KD}$. (Можно рассматривать подобие треугольников MDC и ADC)

Тогда из точек B и M, лежащих по одну сторону от KC, этот отрезок виден под одним и тем же углом, значит, четырехугольник BKCM вписан в окружность, и угол BMC равен 135^0 ($180^0 - 45^0 = 135^0$).

Ответ: 135^0.

Комментарий: обосновано подобие треугольников - 3 балла.

9.4. Пусть n - данное число, t - его остаток от деления на 40 и от деления на 625. Тогда n - t делится на 40 и на 625, т.е. делится на их НОК, НОК (40, 625) =5000. Значит, разность n-t оканчивается либо на 5000, либо на 0000.

t меньше 40, поэтому в разряде тысяч может быть 0 или 5.

Например, 1000002,1005002.

Ответ: 0 или 5.

9.5. Заметим, что общее число способов расставить 8 ладей на доске так, чтобы они не били друг друга равно $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ (на первой вертикали 8 способами, на второй 7 и т.д.). Теперь подсчитаем количество способов расстановки 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: пару ладей стоящих на клетках одного цвета можно расставить не более чем 32 способами (их может быть меньше, так как если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем). Остальные 6 ладей можно расставить 6! способами. Значит общее число способов расстановки в этом случае $k \le 32 \cdot 6!$

Предположим, что ему не удастся это сделать. Это означает, что $k \ge 8!$, но тогда $32 \cdot 6! \ge 8!$, $32 \ge 8 \cdot 7$. Получаем противоречие.

Ответ: Да.

Комментарий:

Найдено только количество способов расстановки 8 ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга: 2 балла

Найдена оценка на количество расстановок 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: 4 балла

Задача в целом решена, но не учитывается, что если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем: не более 6 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

10.1. Найдите значение выражения: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$.

10.2. Найдите все натуральные n, при которых $4^n + n^4$ является простым числом.

10.3. Найдите все целые числа, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-3y+1}}+\frac{1}{\sqrt{y-x+2}}+\frac{1}{\sqrt{2y-x}}=3.$$

10.4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, BD = 9, BE = 12. Найдите радиусы окружностей.

10.5. В клетчатой полоске 1×n некоторые клетки закрашены, а некоторые – нет. При этом среди любых четырёх подряд идущих клеток не более одной закрашенной, а среди любых семи подряд идущих клеток – не менее двух закрашенных. При каком наибольшем *n* это возможно?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

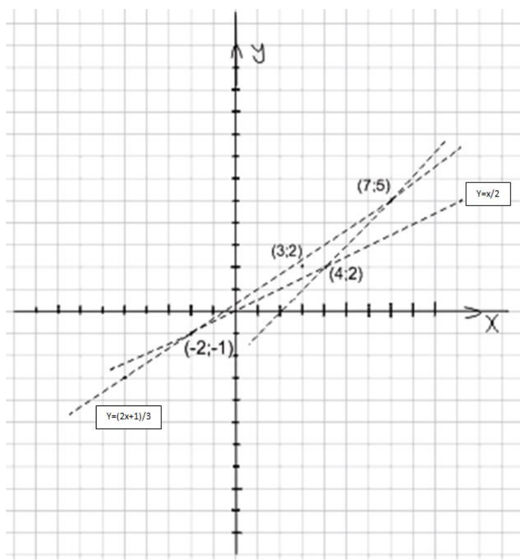
10 класс

Решения задач.

10.1. Избавимся от иррациональности в знаменателе. В результате получим в числителе $\sqrt{2025} - 1 = 45 - 1 = 44$.
Ответ: 44.

10.2. Очевидно, что n – нечетное число, тогда n =2к + 1. Получим
$4^n + n^4 = 4^{2k+1} + (2k+1)^4 = (2\cdot 4^k + (2k+1)^2)^2 - 4\cdot 4^k\cdot (2k+1)^2 = (2\cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2\cdot 2^k\cdot (2k+1))\cdot (2\cdot 4^k + (2k+1)^2 + 2\cdot 2^k\cdot (2k+1))$.
Чтобы это число было простым, меньший множитель должен быть равен 1. То есть $(2\cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2\cdot 2^k\cdot (2k+1)) = 1$.
Но, $(2\cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2\cdot 2^k\cdot (2k+1)) = 4^k + (2^k - (2k+1))^2 \geq 1$, равенство возможно лишь при $k = 0$, $n = 1$
Ответ: n=1

10.3. Построим в координатной плоскости область определения данного уравнения. В построенной области находится лишь одна единственная точка с целочисленными координатами (3; 2). Подставим эти координаты в уравнение и убедимся в том, что это и есть его целочисленное решение.
Ответ: (3; 2)



10.4. Возможны три случая расположения точек A, B и C на прямой.

1) Точка A лежит между точками B и C. Тогда точка A находится внутри второй окружности и не существует прямой, проходящей через A и касающейся второй окружности.

2) Точка B лежит между точками A и C. Имеем $\angle ADB = \angle BEC = \angle AEO_2 = 90^\circ$, и $\angle DEB$, как угол между касательной и хордой равен $\angle ECB$. Треугольники подобны BEC и DEB по двум углам, откуда следует, что

$\frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD}$. Отсюда $2R_2 = BC = \frac{BE^2}{BD} = 16$; $R_2 = 8$.

Отрезки BD и EO_2 параллельны, и по рис.1 должно выполняться неравенство $BD < EO_2$, а в тоже время $BD = 9$ и $EO_2 = R_2 = 8$. Значит, этот случай невозможен.

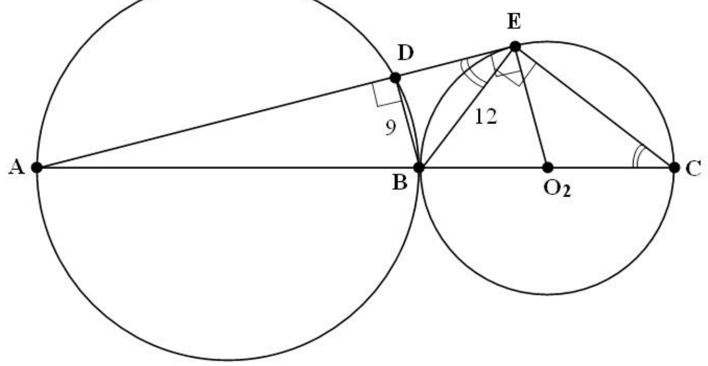


рис. 1

3) Точка C лежит между точками A и B (рис.2) Рассуждая также как в пункте 2, снова получаем $R_2 = 8$. Треугольники ABD и AEO_2 также подобны по двум углам. Отсюда следует, что $\frac{AB}{AO_2} = \frac{DB}{EO_2}$; $\frac{2R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{9}{R_2}$;

$\frac{2R_1}{2R_1 - 8} = \frac{9}{8}$; $R_1 = 36$.

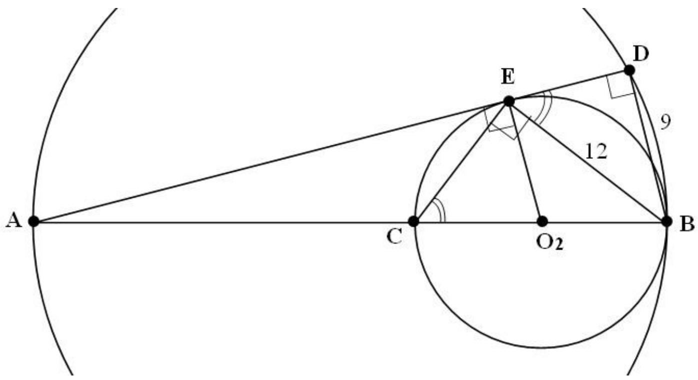


рис. 2

Ответ: 8; 36.

Комментарии:

Рассмотрены все три случая с полным обоснованием – 7 баллов
Рассмотрены второй и третий случаи с полным обоснованием – 6 баллов
Рассмотрен первый и второй или первый и третий случаи – 4 балла
Рассмотрен только второй или третий случай – 3 балла.
Рассмотрен только первый случай – 1 балл

10.5. Решение задачи состоит из двух частей: примера для 9 клеток и оценки, то есть доказательства того, что больше 9 клеток не может быть.

Пример: 9 клеток, среди которых закрашены третья и седьмая. Есть лишь три способа выбрать семь подряд идущих клеток, и две закрашенные в любом случае будут среди них. С другой стороны, любая четверка подряд идущих клеток содержит ровно одну закрашенную.

Оценка: Рассмотрим любые 8 подряд клеток. Среди них не более двух закрашенных. С другой стороны, среди первых семи первых из них не менее двух закрашенных. Значит, среди первых семи ровно две закрашенных, а последняя из выбранных нами 8 клеток не закрашена. То есть, если слева от какой-либо клетки есть еще 7, то она точно не закрашена. Аналогично для клетки, справа от которой есть еще 7 других.

Пусть у нас есть хотя бы 10 клеток. Рассмотрим 10 из них, забыв про остальные. Среди них хотя бы две закрашенных клетки. При этом первые три и последние три не закрашены, согласно предыдущему абзацу, а среди оставшихся четырех не более одной закрашенной. Получаем противоречие.

Ответ: 9

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

11.1. Первый член последовательности равен 1, второй ее член равен 2000, а каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих. Найдите 2025-й член этой последовательности.

11.2. В первый день путешествия турист два часа плыл на плоту, пять часов на моторной лодке по течению реки и три часа на моторной лодке против течения реки. Средняя скорость его движения составила 28 км/ч. Во второй день путешествия турист один час плыл на плоту, четыре часа на моторной лодке по течению реки и два часа на моторной лодке против течения реки. Чему оказалась равна средняя скорость движения туриста во второй день путешествия?

11.3. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 6 см. Точка M удалена от каждой вершины на 17 см. Найдите расстояния от середины отрезка MA до середины каждой из сторон квадрата.

11.4. Решите уравнение: $x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot 2^{x} = 4$.

11.5. Докажите, что среди чисел, состоящих из цифр 3, найдется число, делящееся на 13.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Решения задач.

11.1. Выпишем первые члены данной последовательности: 1, 2000, 1999, 1, 1998, 1997, 1, 1996, 1995, … . Можно заметить закономерность: члены последовательности располагаются следующим образом 1, n, n – 1; 1, n – 2, n – 3; 1, …, при этом их можно разбить на тройки. 2025-й член будет находиться в 675 – й тройке (2025:3 = 675), которая будет иметь вид: 1, 652, 651. Поэтому на 2025-м месте будет стоять число 651.

Ответ: 651.

Комментарий:

1 балл – нашел число подбором,

5 баллов – заметил закономерность, но неправильно определил нужный член последовательности.

11.2. Введем следующие обозначения:

x — собственная скорость моторной лодки;

y — скорость течения реки.

В первый день турист проплыл расстояние

$S_1 = 2y + 5(x+y) + 3(x-y) = 8x + 4y$ (километров) за время

$t_1 = 2 + 5 + 3 = 10$ (часов).

Во второй день турист проплыл расстояние $S_2 = y + 4(x+y) + 2(x-y) = 6x + 3y$ (километров) за время $t_2 = 1 + 4 + 2 = 7$ (часов). Средняя скорость движения туриста в первый день будет:

$v_{\text{ср.1}} = \frac{S_1}{t_1} = \frac{8x+4y}{10} = \frac{4(2x+y)}{10}$. По условию она равна 28 км/ч. Тогда имеем:

$\frac{4(2x+y)}{10} = 28$. Из этого уравнения находим $2x + y = 70$. Найдем среднюю скорость туриста во второй день:

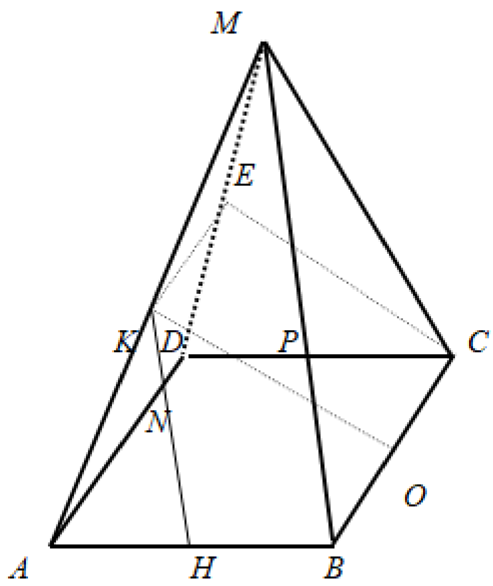
$v_{\text{ср.2}} = \frac{S_2}{t_2} = \frac{6x+3y}{7} = \frac{3(2x+y)}{7} = \frac{3\cdot 70}{7} = 30$ (км/ч).

Ответ: 30 км/ч.

Комментарий:

3 балла – верно составил выражения для средних скоростей в первый и второй день, но найти среднюю скорость во второй день не смог.

11.3. Выполним чертеж. Обозначим середину отрезка *MA* буквой *K*, а середины сторон квадрата *ABCD* буквами *H, O, P* и *N*. Рассмотрим Δ *AMB*. В нем *KH* - средняя линия, поэтому $KH = \frac{1}{2}MB = 8{,}5$ (см).



Проведем $KE \| AD$, тогда *KECO* – параллелограмм ($KE \| AD$, $AD \| BC$, поэтому $KE \| OC$. Также $KE = OC = \frac{1}{2}AD$). Применяя теорему косинусов для Δ *DMC* и Δ *EMC*, находим $\cos\angle DMC = \frac{271}{289}$ и *EC* = 9,5 см. Значит и *KO* = 9,5 см. Оставшиеся два расстояния находятся аналогично и будут равны: *KN* = 8,5 см и *KP* = 9,5 см.

Ответ: 8,5 см; 8,5 см; 9,5 см; 9,5 см.

Комментарий:

1 балл – верно нашел KN и KH,

5 баллов – верно нашел KN и KH, но при применении теоремы косинусов для нахождения других расстояний совершил вычислительные ошибки.

11.4. Так как правая часть уравнения положительная и $2^{\frac{1}{x}} > 0$, $2^x > 0$, то $x > 0$. Оценим левую часть уравнения с помощью неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$:

$x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot 2^x \geq 2\sqrt{x \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2^x} = 2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4$ (неравенство применили два раза, сначала к слагаемым, затем к показателю степени числа 2).

Таким образом, левая часть уравнения всегда не менее 4, а правая всегда равна 4, поэтому решение будет, если левая часть уравнения равна 4. Это будет при $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Комментарий:

1 балл – верно нашел корень уравнения подбором,

3 балла – верно выбрал для оценки левой части уравнения соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим, но ошибся в его применении.

11.5. Рассмотрим 13 чисел с разным количеством цифр 3: 3, 33, 333, 3333, …. Предположим, что ни одно из них не делится на 13. При этом могут получиться 12 различных остатков при делении этих чисел на 13: 1, 2, 3, …, 12. Так как чисел 13, а остатков – 12, то по принципу Дирихле найдутся как минимум два числа с одинаковым остатком при делении на 13. Разность данных чисел будет делиться на 13, это будет число вида 333…000 (сначала несколько троек, потом нули). Заметим, что число 10 взаимно просто с 13, поэтому если с конца числа убрать нули, то оставшееся число будет делиться на 13. Но это число состоит только из троек. Значит, мы нашли такое число. В частности, в качестве такого числа будет число, состоящее из шести троек: 333 333; из 12 троек: 333 333 333 333 и т.д.

Комментарий:

1 балл – нашел верно число подбором, доказательства нет,

4 балла – применил верно принцип Дирихле и получил число вида 333…30…0, но дальше продвинуться не смог.